



TITLE:

Kirilov-Kostant theory とコアジョイントオービット上の Feynman path integrals (等質空間上の調和解析と群の表現論)

AUTHOR(S):

橋本, 隆司; 小椋, 一徳; 岡本, 清郷; 澤江, 隆一; 安永, 尚稔

CITATION:

橋本, 隆司 ...[et al]. Kirilov-Kostant theory とコアジョイントオービット上の Feynman path integrals (等質空間上の調和解析と群の表現論). 数理解析研究所講究録 1991, 761: 36-51

ISSUE DATE:

1991-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/82229>

RIGHT:

Kirillov-Kostant theory と
コアジョイントオービット上の
Feynman path integrals

広大理	橋本	隆司	(Takashi Hashimoto)
広大理	小椋	一徳	(Kazunori Ogura)
広大理	岡本	清郷	(Kiyosato Okamoto)
広大理	澤江	隆一	(Ryuichi Sawae)
広大理	安永	尚純	(Hisatoshi Yasunaga)

§0. Alekseev, Faddeev, Shatashvili によるコンパクトリー群の既約表現の構成法に従って、ノンコンパクトリー群のコアジョイントオービット上の Feynman path integral を計算した。しかし、一般のリー群に対する統一された方法を見出すことはまだ出来ていない。そこで Heisenberg group Affine transformation group, $SL(2, \mathbb{R})$ についての結果を述べることにする。

§ 1. Kirillov-Kostant theory

G をリー群とし、 \mathfrak{g} をそれに対するリー環、 Ad を \mathfrak{g} 上の *adjoint action* とし、 \mathfrak{g} の相対空間 \mathfrak{g}^* 上の *coadjoint action* を Ad' で表す。

任意の $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ に対し、 λ に対する *isotropy subgroup* を、

$$G_\lambda = \{g \in G, Ad^*(g)\lambda = \lambda\} \text{ とし、そのリー環を } \mathfrak{g}_\lambda \text{ とする。}$$

今 λ は *integral* とする。

既ち、 $\mathfrak{g}_\lambda \ni X \mapsto -\sqrt{-1}\lambda(X) \in \mathbb{R}$ は
 $G_\lambda \xrightarrow{\pi_\lambda} U(1)$ にリフトする。

この時

$$\begin{array}{ccc} \lambda \cdot d\lambda & & L_\lambda \text{ associated line bundle} \\ \uparrow \omega_\lambda & \begin{array}{c} G \\ \downarrow G_\lambda \end{array} \xrightarrow{\pi_\lambda} U(1) & \\ & G/G_\lambda & \end{array}$$

Symplectic form.

又、 $g \in G$ 、 $f \in L^2(L_\lambda, \wedge^{\frac{1}{2}} \omega_\lambda)$ 、 $d = \dim G/G_\lambda$ に対し、 G の表現 π_λ を、

$$(\pi_\lambda(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$$

で定義する。

Real polarization P をとる。

$$\sigma_{\lambda} \subset P \subset \sigma_{\bar{\lambda}}$$

$$\lambda([P, P]) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda: P \ni X \longmapsto -\hbar\lambda(X) \in \hbar\mathbb{R} : \text{lie alg. homo.}$$

λ は キャラクター η_{λ} にリフトするとする。

$$P \xrightarrow{\eta_{\lambda}} U(1)$$

$$\eta_{\lambda} \Rightarrow \eta_{\lambda}\eta_P (= \xi_{\lambda})$$

η_P は、 P の キャラクター であって、 η_P の associated line bundle が、 G/P の volume bundle の絶対値の平方根となるものとする。

この時、

$$\begin{array}{ccc} G & & L\xi_{\lambda} \\ \downarrow P & \searrow & \uparrow \\ G/P & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C}^* \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} G & & L\xi_{\lambda} \\ \downarrow P_0 & \searrow \xi_{\lambda}/P_0 & \uparrow \\ G/P_0 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C}^* \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{一般には、complex polarization} \\ \sigma_{\lambda}^{\mathbb{C}} \subset P \subset \sigma_{\bar{\lambda}}^{\mathbb{C}} \\ \text{を考えなければならぬ。} \end{array} \right)$$

§ 2. Examples

(i) Heisenberg group

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ & 1 & y \\ & & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{とし、リー環を}$$

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ & 0 & y \\ & & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{又、相対空間 } \mathfrak{g}^* \text{ を}$$

$$\mathfrak{g}^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ \xi & 0 & \\ \sigma & \eta & 0 \end{pmatrix} \mid \xi, \eta, \sigma \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \ni (X, \lambda) \longmapsto \lambda X \in \mathbb{R} \quad \text{とする。}$$

この時、任意の nontrivial coadjoint orbit は

$$\mathfrak{g}^* \ni \lambda_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ \sigma & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{for } \exists \sigma \neq 0$$

と表される。 λ_σ に対する isotropy subgroup は、

$$G_{\lambda_\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{リー環は、}$$

$$\mathfrak{g}_{\lambda_\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{となる。}$$

Real polarization を

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{ととる。}$$

これに対する analytic subgroup P は、

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

となる。

すると Lie alg. homo.

$$P \ni \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \longmapsto -\sqrt{-1}xz \in \mathbb{R} \text{ は}$$

キャラクター

$$\chi_\lambda: P \ni \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \longmapsto e^{-\sqrt{-1}xz} \in U(1)$$

にリフトする。

この時、path integral は、

$$(\dim \mathcal{G}/\mathcal{G}_\lambda = 2)$$

$\forall X, \forall \bar{X} \in \mathcal{G}$ 、s.t. $\mathcal{G} = \mathbb{R}X \oplus P$. $P = \mathbb{R}\bar{X} \oplus \mathcal{G}_\lambda$ に対し

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{k=0}^{N-1} \frac{d\langle \text{Ad}^*(e^{y_k \bar{X}}) \lambda, g_k^{-1} dg_k \rangle}{2\pi}$$

$$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ni (\lambda_0 \dots \lambda_{N-1}, y_0 \dots y_{N-1})$$

$$e^{-\sqrt{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{(k+1)/N} dt \langle \text{Ad}^*(e^{y_k \bar{X}}) \lambda, g^{-1}(t) \frac{dg(t)}{dt} - \text{Ad}(g^{-1}(t)) Y \rangle} F(g_0)$$

となる。

$$(\pi(e^{TY})F)(g')$$

$$g(t) = e^{(\lambda_k + \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{T_N}(t - \frac{k}{N}T))X} e^{P + (P' - P)\frac{t}{T}} \quad t \in [\frac{k}{N}T, \frac{k+1}{N}T)$$

$$g_0 = e^{x_0 X} e^P, \quad g' = e^{x' X} e^{P'} \quad P, P' \in \mathcal{P}, x_N = x'$$

$$\begin{aligned} g_k &= g\left(\frac{k}{N}T\right) \\ &= e^{x_k X} e^{P + (P' - P)\frac{k}{N}} \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{etc etc}$$

$$(\eta = \mathbb{R}X, \bar{\eta} = \mathbb{R}\bar{X})$$

$$\mathcal{G} = \eta \oplus \mathcal{P}, \quad \mathcal{P} = \bar{\eta} \oplus \mathcal{G}_\lambda$$

$$\begin{array}{ccc} \eta & \xrightarrow{\exp} & N \longrightarrow \mathcal{G}/\mathcal{P} \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ \eta & \longrightarrow & \eta\mathcal{P} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \bar{\eta} & \xrightarrow{\exp} & \bar{N} \longrightarrow \mathcal{P}/\mathcal{G}_\lambda \\ \downarrow \bar{\psi} & & \downarrow \bar{\psi} \\ \bar{\eta} & \longrightarrow & \bar{\eta}\mathcal{G}_\lambda \end{array}$$

onto etc etc.

$$\mathcal{G}/\mathcal{P} \ni e^{xX} \mathcal{P} \longmapsto x \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{P}/\mathcal{G}_\lambda \ni e^{y\bar{X}} \mathcal{G}_\lambda \longmapsto y \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{G}/\mathcal{G}_\lambda \ni e^{xX} e^{y\bar{X}} \mathcal{G}_\lambda \longmapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{global coordinate}$$

この時 action を.

$$\forall Y \in \mathfrak{g}$$

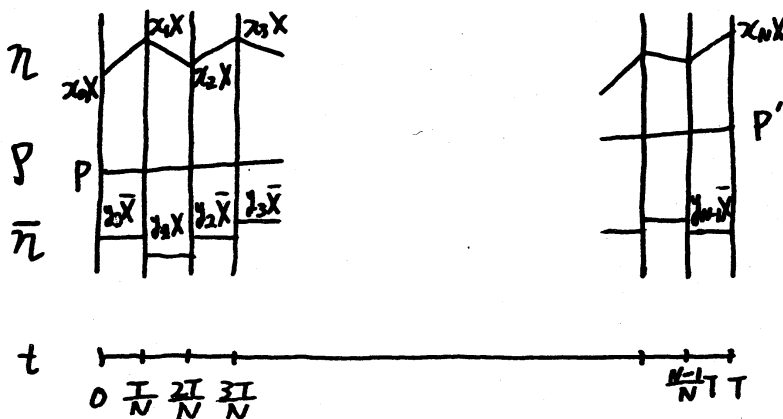
$$\forall \gamma: [0, T] \longrightarrow \pi \oplus \mathcal{P} \oplus \bar{\pi}$$

$$t \longmapsto (x(t)X, p(t), y(t)\bar{X}) \quad \text{に対し.}$$

$$\text{action}_Y(\gamma) = \int_0^T \langle \text{Ad}^*(e^{y(t)\bar{X}})\lambda, g^{-1} \frac{dg}{dt} - \text{Ad}(g^{-1})Y \rangle dt$$

$$g = g(t) = e^{x(t)X} e^{p(t)} \quad \text{で定義する.}$$

Path は下の様にとる.



$$Y = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(t) = \begin{pmatrix} 0 & u(t) & v(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{とする.}$$

$$\text{Action}_Y(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$$

$$= \int_0^T \sigma(\dot{v} - u\dot{x} - y\dot{x}) - \sigma(ax + c - bu - by) dt$$

上の Path に対し

$$\text{Action}_Y(x_0 \cdots x_N, y_0 \cdots y_{N-1}, u, v, u', v')$$

$$= \sum_{k=1}^N \int_{\frac{k-1}{N}T}^{\frac{k}{N}T} \sigma \left(\frac{v' - v}{T} - (u + (u' - u) \frac{t}{T}) \frac{x_k - x_{k-1}}{T/N} - y_{k-1} \frac{x_k - x_{k-1}}{T/N} \right)$$

$$- \sigma \left(a(x_{k-1} + \frac{x_k - x_{k-1}}{T/N} (t - \frac{k-1}{N}T)) + c - b(u + (u' - u) \frac{t}{T}) - by_{k-1} \right) dt$$

$$\text{但し } u(0)=u, \quad u(T)=u'$$

$$v(0)=v, \quad v(T)=v' \quad \text{である。}$$

又メジャ-は

$$\prod_{k=0}^{N-1} \frac{d \langle \text{Ad}'(e^{y_k X}) \lambda, g_k^{-1} dg_k \rangle}{2\pi}, \quad (g_k = e^{x_k X} e^{P + (P' - P) \frac{k}{N}})$$

$$= \prod_{k=0}^{N-1} \left(\sigma dx_k \frac{dy_k}{2\pi} \right) = dx_0 \cdot \left(\prod_{k=1}^{N-1} dx_k \prod_{k=0}^{N-1} \frac{\sigma dy_k}{2\pi} \right)$$

とする。

パスインテグラルは.

$$g' = e^{x' X} e^{P'} \quad P' = \begin{pmatrix} 0 & u' & v' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g = e^{x X} e^P \quad P = \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{とする。}$$

$$\Gamma(L_{\lambda}^* \otimes L_{\lambda})$$

ψ

$$K_Y(g', g) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^{N-1} dx_k \prod_{k=1}^{N-1} \frac{\sigma dy_k}{2\pi} e^{\text{Faction}_Y(x_0 \cdots x_N, y_0 \cdots y_{N-1}, u, v, u', v')}$$

$$(x' = x_N, x = x_0)$$

$$= e^{\text{Fis}(v' - v)} \delta(x' - x - bT) e^{-\text{Fis}(axT + \frac{a^2}{2}T^2 + cT)}$$

よって

$$(\pi_{\lambda}^P(e^{\tau Y}) F)(g) = \int_{-\infty}^{\infty} K_Y(g', g) F(g) dx$$

を得る。

以上のことは

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n & z \\ & \ddots & & & y_1 \\ & & 0 & & \vdots \\ & & & \ddots & y_n \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} x_1 \cdots x_n \\ y_1 \cdots y_n \\ z \end{matrix} \in \mathbb{R} \right\}$$

および

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{の場合に拡張できる。}$$

(ii) Affine transformation group of real line

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x > 0 \right\}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$G^* = \left\{ \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \mid \xi, \sigma \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{とする。}$$

この時 $\lambda_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \in G^*$, $\sigma = \pm 1$ に対し、

$$G_{\lambda_\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad G_{\lambda_\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

又 polarization を

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} \text{ とし、}$$

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} \text{ とする。}$$

$$\xi_\lambda: P \ni \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto e^{-\sqrt{1}\sigma y} \in U(1)$$

π_λ^P : representation of G

この時パスインテグラルは、

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{とすると.}$$

$$\text{action}_Y(\gamma) = \int_{\gamma} \langle \text{Ad}^*(e^{y(t)X})\lambda, g(t)^{-1} \frac{dg(t)}{dt} - \text{Ad}(g^{-1}(t))Y \rangle dt$$

$$g(t) = \exp \begin{pmatrix} x(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & u(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^T \sigma((y(t)+u(t)) \dot{x}(t) + \dot{u}(t)) - \sigma a(y(t)+u(t)) - \sigma b e^{-x(t)} dt$$

$$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{となる.}$$

$$y(t) = y_{k-1}$$

$$x(t) = x_{k-1} + \frac{x_k - x_{k-1}}{\frac{T}{N}} (t - \frac{k-1}{N}T) \quad t \in [\frac{k-1}{N}T, \frac{k}{N}T), k=1, \dots, N$$

$$u(t) = u + (u' - u) \frac{t}{T}$$

とすると、

$$K_Y(g', g)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dx_1 \dots dx_{N-1} \frac{\sigma dy_0}{2\pi} \dots \frac{\sigma dy_{N-1}}{2\pi} e^{i \text{action}_Y(\gamma)}$$

$$g' = \exp \begin{pmatrix} x' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & u' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g = \exp \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x' = x_N, x = x_0 \quad \text{とすると.}$$

$$= e^{\sigma f_1(u'-u)} e^{f_1 \sigma \frac{b}{2}} e^{-x'(1-e^{aT})} \delta(x' - x - aT)$$

よって

$$\int K_Y(x', x) F(x) dx = (\pi_\lambda^P(e^{iY}) F)(x')$$

を得る。

(iii) $SL(2, \mathbb{R})$

$$G = SL(2, \mathbb{R})$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$$

$$\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$$

$$\lambda_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}, \quad \sigma \neq 0 \text{ に対し、}$$

$$G_{\lambda_\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} z \in \mathbb{R} \\ z \neq 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\mathfrak{g}_{\lambda_\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{とする。}$$

Polarization は

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{とする。}$$

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ y & z^{-1} \end{pmatrix} \mid z, y \in \mathbb{R}, z \neq 0 \right\}$$

$$\mathcal{P}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ y & z^{-1} \end{pmatrix} \mid z, y \in \mathbb{R}, z > 0 \right\} \quad \text{とする。}$$

$$\xi_{\lambda\sigma} : P_0 \ni \begin{pmatrix} z & 0 \\ y & z^{-1} \end{pmatrix} \longmapsto z^{-F_{15}-1} \in \mathbb{C}^*$$

$$\begin{array}{ccc} G & & L_\lambda \\ \downarrow P_0 & \xrightarrow{\xi_{\lambda\sigma}} & \mathbb{C}^* \\ G/P_0 & \xleftarrow{L_\lambda} & \end{array}$$

$$\eta = \pi \oplus \rho \quad \text{とすると、}$$

$$\begin{array}{c} \eta \\ \downarrow \text{exp} \\ N \ni \eta \\ \downarrow \\ G/P_0 \ni \eta P_0 \end{array}$$

これは onto ではない。 $\chi = z''$.

$$\eta = R \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{として、カバリングをとる。}$$

$$h_0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad h_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

$$G/P_0 = \bigcup_{i=0}^3 h_i N P_0 \quad \left(G/P_0 \supset_{\text{open}} U_i \quad i=0, \dots, 3, U_i = h_i N P_0 \right)$$

$$\left(G \supset_{\text{open}} V_i = U_i P_0 \right)$$

$$G/P_0 = \overline{U_0 \cup U_2} = \overline{U_1 \cup U_3}$$

$Y_1 = \begin{pmatrix} a & \\ & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$ とする。その時、

$K_{Y_1}(g', g)$ を求める。

$V_t \in [0, T]$ に對し、

$$e^{-tY_1} V_0 \subset V_0$$

$$e^{-tY_1} V_2 \subset V_2$$

$$V_0 \cap V_2 = \phi$$

$$G = \overline{V_0 \cup V_2}$$

$$K_{Y_1}(g', g)|_{V_0 \times V_2} = 0$$

$$K_{Y_1}(g', g)|_{V_2 \times V_0} = 0$$

$K_{Y_1}(g', g)|_{V_i \times V_i} \ (i=0,2)$ の値を求める。

$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると、

$$\text{action}_{Y_1}(r) = \int_{\mathcal{I}} \langle \text{Ad}'(e^{g(t)X}) \lambda, g(t)^{-1} \frac{dg(t)}{dt} - \text{Ad}(g(t)^{-1}) Y_1 \rangle dt$$

$$g(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \pm 1 & \\ & \pm 1 \end{pmatrix}}_{h_0, h_2} \exp \begin{pmatrix} 0 & x(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} u(t) & 0 \\ v(t) & -u(t) \end{pmatrix} \quad \text{とすると、}$$

$$V_0 \longleftrightarrow +1$$

$$V_2 \longleftrightarrow -1$$

$$\text{action}_{Y_1}(\gamma)$$

$$= \int_0^T \frac{\sigma}{2} \left(v \frac{1 - e^{-2u}}{u} + 2ye^{-2u} \right) \dot{x} - \frac{\sigma}{2} \left(2a + 2ax \left(v \frac{1 - e^{-2u}}{u} + 2ye^{-2u} \right) \right) dt + \sigma \dot{u}$$

$$y = y(t) = y_{k-1}$$

$$x = x(t) = x_{k-1} + \frac{x_k - x_{k-1}}{\frac{T}{N}} \left(t - \frac{k-1}{N} T \right)$$

$$u = u(t) = u + (u' - u) \frac{t}{T}$$

$$v = v(t) = v + (v' - v) \frac{t}{T} \quad t \in \left[\frac{k-1}{N} T, \frac{k}{N} T \right), \quad k = 1, \dots, N$$

$$\gamma \gamma \gamma \gamma.$$

$$K_{Y_1}(g', g) V_i \otimes V_i \quad i = 0, 2$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dx_1 \dots dx_{N-1} \frac{\sigma dx_0}{2\pi} \dots \frac{\sigma dx_{N-1}}{2\pi} e^{\sqrt{1} \text{action}_{Y_1}(\gamma)}$$

$$g' = h_i \exp \begin{pmatrix} 0 & x' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} u' & 0 \\ v' & -u' \end{pmatrix}$$

$$g = h_i \exp \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & -u \end{pmatrix}$$

$$= e^{\sqrt{1} \sigma u' + u'} e^{\sqrt{1} \sigma u - u} e^{\sqrt{1} \sigma a T + u T} \delta(x' - e^{2aT} x)$$

$$\gamma, \gamma.$$

$$\int_{\mathbb{R} \cup \mathbb{R}} K_{Y_1}(g', g) F(g) dx = (\pi_\lambda^p(e^{\tau Y_1}) F)(g')$$

を得る。

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{のとき}$$

$$\forall t \in [0, T] \text{ に対し, } e^{-tY_2} V_i \subset V_i \quad i=0, 2$$

$$K_{Y_2}(g', g) \big|_{V_0 \times V_2} = 0$$

$$K_{Y_2}(g', g) \big|_{V_2 \times V_0} = 0$$

$$K_{Y_2}(g', g) \big|_{V_i \times V_i} \quad (i=0, 2) \text{ の値を求める。}$$

$$\text{action}_{Y_2}(\gamma)$$

$$= \int_{\gamma} \langle \text{Ad}^*(e^{y(t)\bar{X}}) \lambda, g^{-1}(t) \frac{dg(t)}{dt} - \text{Ad}(g^{-1}(t)) Y_2 \rangle dt$$

$$g(t) = h_i \exp \begin{pmatrix} 0 & x(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} u(t) & 0 \\ v(t) & -u(t) \end{pmatrix} \quad \text{とし,}$$

$$= \int_0^T \frac{\sigma}{2} \left(v \frac{1-e^{-2u}}{u} + 2ye^{-2u} \right) \dot{x} - \frac{\sigma}{2} b \left(v \frac{1-e^{-2u}}{u} + 2ye^{-2u} \right) dt + \sigma u$$

より,

$$K_{Y_2}(g', g) \big|_{V_i \times V_i} \quad i=0, 2.$$

$$= e^{F\sigma u' + u'} e^{-F\sigma u - u} \delta(x' - x - bT)$$

となり,

$$\int_{\mathbb{R} \cup \mathbb{R}} K_{Y_2}(g', g) F(g) dx = (\pi_{\lambda}^P(e^{TY_2}) F)(g')$$

を得る。

$Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ の時

$\forall t \in [0, T]$ に対し.

$$e^{-tY_3} V_i \subset V_i \quad i=1,3$$

$$K_{Y_3}(g', g)|_{V_1 \times V_3} = 0$$

$$K_{Y_3}(g', g)|_{V_3 \times V_1} = 0$$

$$K_{Y_3}(g', g)|_{V_i \times V_i} \quad i=1,3 \text{ の値を求める。}$$

action $_{Y_3}(x)$

$$= \int_0^T \frac{\sigma}{2} \left(v \frac{1-e^{-2u}}{u} + 2ye^{-2u} \right) \dot{x} + \frac{\sigma}{2} c \left(v \frac{1-e^{-2u}}{u} + 2ye^{-2u} \right) + \sigma \dot{u} dt$$

よって

$$K_{Y_3}(g', g)|_{V_i \times V_i} \quad i=1,3$$

$$= e^{A\sigma u' + u'} e^{-A\sigma u - u} \delta(x' - x + cT)$$

よって

$$\int_{R \cup R} K_{Y_3}(g', g) F(g) dx = (\pi_R (e^{TY_3}) F)(g')$$

を得る。